formazione a tutto tondo

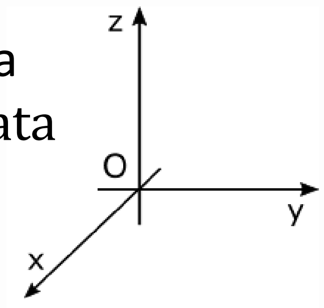
15. Geometria solida e Successioni

Rette nello spazio

- L’equazione di un piano nello spazio è:

$$ax + by + cz + d = 0$$

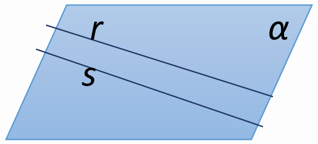
$x \rightarrow$ ascissa
$y \rightarrow$ ordinata
$z \rightarrow$ quota

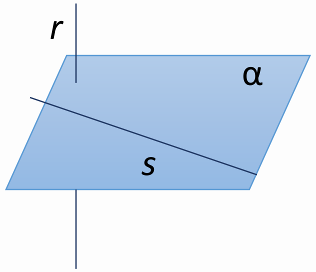


- **Posizione reciproca di due rette nello spazio**

Una retta è intersezione di due piani non paralleli.
Due rette nello spazio possono essere:

- **complanari**
  - incidenti
  - coincidenti
  - parallele distinte

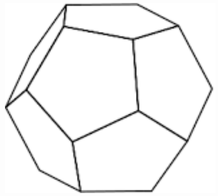




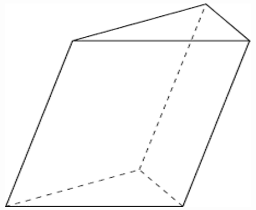
- **sghembe** (non appartengono allo stesso piano)

Poliedri e Prismi

- Un **poliedro** è un solido delimitato da un numero finito di poligoni (facce).



- Un **prisma** è un poliedro che ha come basi due poligoni congruenti di n lati, giacenti su piani paralleli, connessi da n parallelogrammi (facce laterali).



Se le facce laterali sono perpendicolari alle basi il prisma si dice **retto**.

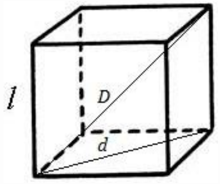
In generale: $S_l = 2p_b \cdot h$ $\quad S_t = S_l + 2S_b$ $\quad V = S_b \cdot h$

S_l: superficie laterale (somma facce laterali)
h: altezza del solido (distanza tra le basi)
$2p_b$: perimetro di base

S_t: superficie totale
S_b: superficie di base
V: volume del solido

Principali figure solide

CUBO

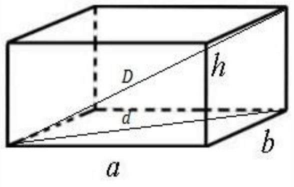


$$d = l\sqrt{2} \qquad D = l\sqrt{3}$$

$$S_b = l^2 \qquad S_l = 4l^2 \qquad S_t = 6l^2$$

$$V = l^3$$

PARALLELEPIPEDO

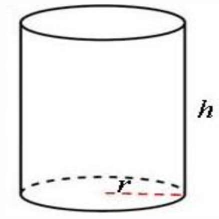


$$d = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad D = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2}$$

$$S_b = a \cdot b \qquad S_l = 2(a+b)h \qquad S_t = S_l + 2S_b$$

$$V = a \cdot b \cdot h$$

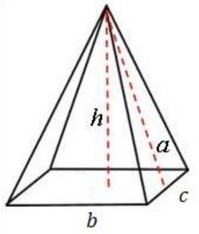
CILINDRO



$$S_b = \pi r^2 \qquad S_l = 2\pi r \cdot h \qquad S_t = S_l + 2S_b$$

$$V = \pi r^2 \cdot h$$

PIRAMIDE

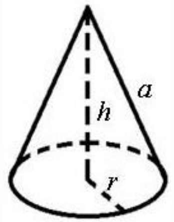


$$S_l = \frac{2p_b \cdot a}{2} \qquad S_t = S_l + S_b$$

$$V = \frac{S_b \cdot h}{3}$$

a apotema: altezza della faccia laterale

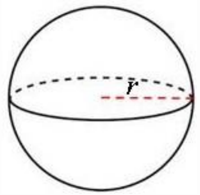
CONO



$$S_b = \pi r^2 \qquad S_l = \frac{2\pi r \cdot a}{2} \qquad S_t = S_l + S_b$$

$$V = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$$

SFERA



$$S_t = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Successioni

Una **successione** di numeri reali è una funzione $a: N \to R$.
Alla notazione $a(n)$ si sostituisce la notazione a_n (a_n : n – esimo termine)

Particolari successioni sono le progressioni aritmetiche e geometriche.

Una **progressione aritmetica** è una successione tale che la differenza $\boldsymbol{d}$ tra ciascun termine e il suo precedente sia costante.

☛ $2 \xrightarrow{+3} 5 \xrightarrow{+3} 8 \xrightarrow{+3} 11 \xrightarrow{+3} \dots$

$a_1 = 2$
$a_2 = a_1 + 3 = 2 + 3 = 5$
$a_3 = a_2 + 3 = a_1 + 2 \cdot 3 = 2 + 6 = 8$
$a_4 = a_3 + 3 = a_1 + 3 \cdot 3 = 2 + 9 = 11$
$\vdots$
$a_n = a_{n-1} + 3 = a_1 + (n-1) \cdot 3 \quad \to$

$\boldsymbol{d} =$ **ragione della progressione**
$\boldsymbol{d = a_n - a_{n-1}}$

☛ $\boldsymbol{d} = 3$

$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d}$

☛ Calcola il 10° termine della progressione 1 5 9 13 …

$a_1 = 1,\ d = 5 - 1 = 4 \quad \rightarrow \quad a_{10} = a_1 + (10 - 1) \cdot d = 1 + 9 \cdot 4 = 37$

- **Somma dei primi n termini di una progressione aritmetica**

La somma dei primi n termini di una progressione aritmetica (S_n) è uguale a:

indice dell'ultimo termine della somma

$$\boldsymbol{S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}}$$

simbolo di sommatoria

indice del 1° termine della somma

☛ La somma dei primi 10 termini della progressione 1 5 9 …

$a_1 = 1,\ a_{10} = 37 \rightarrow S_n = (1 + 37) \cdot \frac{10}{2} = 38 \cdot 5 = 190$

Una **progressione geometrica** è una particolare successione tale che il rapporto $\boldsymbol{q}$ tra ciascun termine e il suo precedente sia costante.

$$2 \xrightarrow{\times 2} 4 \xrightarrow{\times 2} 8 \xrightarrow{\times 2} 16 \xrightarrow{\times 2} \dots$$

$\boldsymbol{q} =$ **ragione della progressione**

$$\boldsymbol{q} = \frac{\boldsymbol{a_n}}{\boldsymbol{a_{n-1}}}$$

$$a_1 = 2$$
$$a_2 = a_1 \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 4$$
$$a_3 = a_2 \cdot 2 = a_1 \cdot 2^2 = 2 \cdot 4 = 8$$
$$a_4 = a_3 \cdot 2 = a_1 \cdot 2^3 = 2 \cdot 8 = 16$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1} \cdot 2 = a_1 \cdot 2^{n-1} \quad \rightarrow$$

$q = 2$

$$\boldsymbol{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

Il 6° termine della progressione 4 12 36 108 …

$a_1 = 4,\ q = 3 \ \rightarrow \ a_6 = 4 \cdot 3^5 = 4 \cdot 243 = 972$

- **Somma dei primi n termini di una progressione geometrica**

La somma dei primi n termini di una progressione geometrica (S_n) è uguale a:

$$\boldsymbol{S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

☛ La somma dei primi 10 termini della progressione 4 12 36 …

$a_1 = 4, q = 3$

$S_n = 4 \cdot \frac{3^{10}-1}{3-1} = 4 \cdot \frac{3^{10}-1}{2} = 2 \cdot (3^{10} - 1) = 118096$

- **La successione di Fibonacci**

La successione di Fibonacci è una particolare successione i cui primi termini sono:

1 1 2 3 5 8 13 21 …

Fissati $a_1 = 1$ e $a_2 = 1$ i termini successivi si ottengono come la somma dei due termini precedenti:

$a_1 = 1$

$a_2 = 1$

$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$

$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$

$\vdots$

$\boldsymbol{a_n = a_{n-1} + a_{n-2}}$

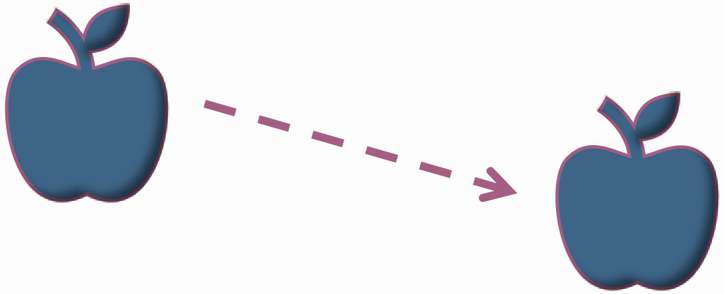
Trasformazioni geometriche nel piano

- È una corrispondenza biunivoca che associa a ogni punto del piano uno e un solo punto del piano stesso.

- **ISOMETRIE**: particolari trasformazioni geometriche che a ogni coppia di punti A e B del piano fanno corrispondere una coppia di punti A' e B' tali che le misure dei segmenti AB e A'B' sono uguali. Conservano le distanze e trasformano figure geometriche in figure congruenti.

- 3 tipi: **traslazione, simmetria assiale, simmetria centrale.**

Traslazione



- Dato il vettore $v(a, b)$, associa ad ogni punto $P(x, y)$ il punto $P'(x, y)$ di coordinate:

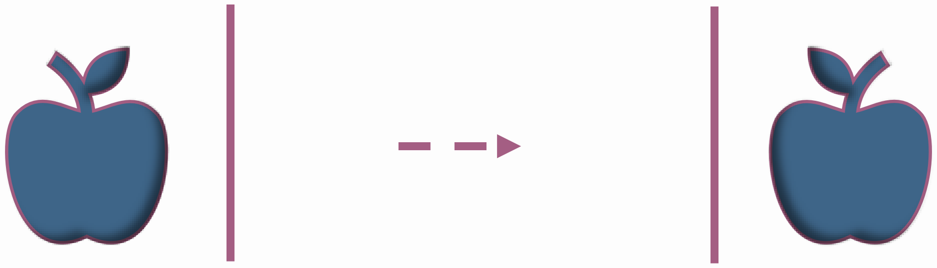
$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

- Dato il grafico di una funzione $y = f(x)$, mediante una traslazione di vettore v, otteniamo il grafico di una nuova funzione:

$$y = f'(x) = f(x - a) + b$$

- **Esempio**: traslazione di $v(1,2)$ della parabola di equazione $y = x^2$ è data dalla funzione $y = (x - 1)^2 + 2 \ \rightarrow y = x^2 - 2x + 3$

Simmetria assiale



- Fissata nel piano una retta r, la simmetria assiale rispetto alla retta r a ogni punto del piano P fa corrispondere il punto P' del semipiano opposto rispetto a r tale r è l'asse del segmento PP'.

Rispetto all’asse $x = a$

$$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = y \end{cases}$$

Rispetto all’asse $y = b$

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2b - y \end{cases}$$

Rispetto all’asse $x = 0$

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

Rispetto all’asse $y = 0$

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

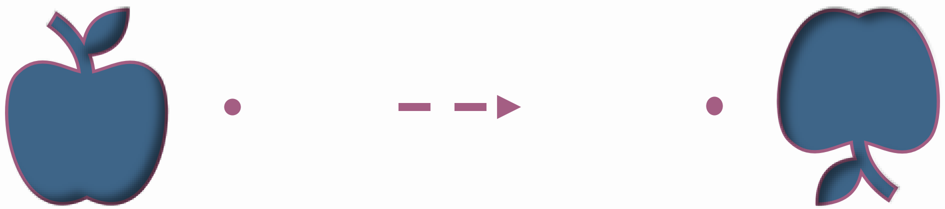
Rispetto all’asse $y = x$

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

Rispetto all’asse $y = -x$

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

Simmetria centrale



- Fissato nel piano un punto M, la simmetria centrale di centro M associa a ogni punto P del piano il punto P' tale che M è il punto medio di PP'.
- Le equazioni della simmetria di centro $C(x_0, y_0)$ sono:

$$\begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases}$$

- Le equazioni della simmetria rispetto all'origine $C(0,0)$ sono:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$