Urto elastico in 2 dimensioni

di Matteo Musso

22 dicembre 2022

In questo set di note dimostreremo una proprietà particolare degli urti elastici in due dimensioni: dopo l'urto, l'angolo tra due corpi di massa uguale è sempre di 90°.

Partiamo con il nostro problema:

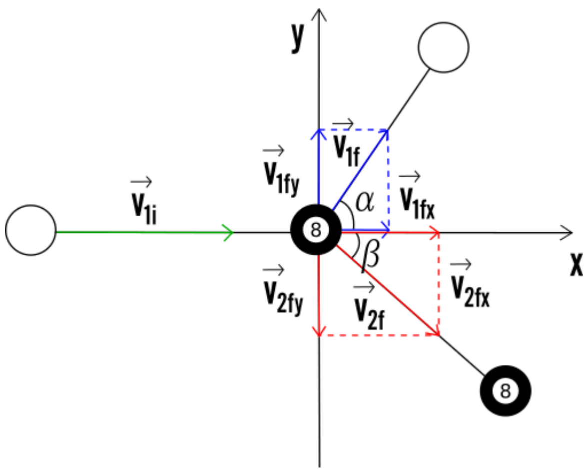

Figura 1: *In questo esempio un corpo è fermo (pallina "8") e l'altro si muove verso di lui lungo l'asse delle x.*
Anche se sembra un caso particolare, qualsiasi caso può essere ricondotto a questo, anche due corpi che hanno velocità diverse. Di conseguenza, i risultati che dimostreremo sono generali.

Per questa dimostrazione assumeremo che i due corpi siano dotati della stessa massa ($m_1 = m_2$) e vogliamo dimostrare che $\alpha + \beta = 90°$. Per fare questo, richiamiamo le leggi di conservazione per un urto elastico con due corpi di massa generica:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 &= \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 && \text{Conservazione dell'energia cinetica} \\
m_1v_1 &= m_1v_1'\cos(\alpha) + m_2v_2\cos(\beta) && \text{Quantità di moto lungo "x"} \\
0 &= m_1v_1'\sin(\alpha) + m_2v_2'\sin(-\beta) && \text{Quantità di moto lungo "y"}
\end{aligned} \tag{1}$$

A primo membro sono presenti le quantità prima dell'urto e a secondo membro quelle dopo l'urto. v_1 e v_2 sono le velocità dei due oggetti prima dell'urto, mentre v_1' e v_2' sono le velocità dopo l'urto.
Il segmo " - " nella conservazione della quantità di moto lungo "y" deriva dal fatto che gli angoli sono definiti in senso *ANTIORARIO*, da cui $\alpha > 0$ e $\beta < 0$. Possiamo semplificare la scrittura ricordando che

$$\sin(-\beta) = -\sin(\beta).$$

Notiamo che tutte le masse si possono semplificare, in quanto uguali. Inoltre, la velocità iniziale del corpo "2" è 0 poiché è fermo. Sostituendo otteniamo:

$$\begin{aligned}
v_1^2 &= v_1'^2 + v_2'^2 && \text{Conservazione dell'energia cinetica} \\
v_1 &= v_1'\cos(\alpha) + v_2'\cos(\beta) && \text{Quantità di moto lungo "x"} \\
0 &= v_1'\sin(\alpha) - v_2'\sin(\beta) && \text{Quantità di moto lungo "y".}
\end{aligned} \tag{2}$$

Per ottenere la relazione che ci interessa, prendiamo il quadrato delle equazioni di conservazione della quantità di moto lungo "x" e "y":

$$\begin{aligned} (v_1)^2 &= v_1'^2 \cos^2(\alpha) + v_2'^2 \cos(\beta)^2 + 2v_1'v_2' \cos(\alpha)\cos(\beta), \\ v_1'^2 \sin^2(\alpha) &= +v_2'^2 \sin^2(\beta). \end{aligned} \tag{3}$$

Nella seconda abbiamo portato a secondo membro $v_2' \sin(\beta)$ in modo da calcolare più agevolmente il quadrato.
Possiamo ora usare l'*identità fondamentale della goniometria*:

$$\sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha)$$
$$\sin^2(\beta) = 1 - \cos^2(\beta)$$

e sostituire nell'equazione della quantità di moto lungo "y":

$$v_1'^2 \left[1 - \cos^2(\alpha)\right] = +v_2'^2 \left[1 - \cos^2(\beta)\right], \tag{4}$$

ottenendo quindi

$$v_1' \cos^2(\alpha) = v_1'^2 - v_2'^2 + v_2'^2 \cos^2(\beta). \tag{5}$$

Ora possiamo usare l'equazione (5) e sostituirla nell'equazione della quantità di moto lungo "x", ottenendo:

$$v_1^2 = v_1'^2 - v_2'^2 + 2v_2'^2 \cos^2(\beta) + 2v_1'v_2' \cos(\alpha)\cos(\beta). \tag{6}$$

Sfruttiamo ora la conservazione dell'energia cinetica per eliminare il termine v_1^2. Cioè scriviamo

$$v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2$$

e sostituiamo nell'equazione precedente:

$$v_1'^2 + v_2'^2 = v_1'^2 - v_2'^2 + 2v_2'^2 \cos^2(\beta) + 2v_1'v_2' \cos(\alpha)\cos(\beta). \tag{7}$$

Portiamo a primo membro il termine $v_2'^2$ ed eliminiamo i due termini $v_1'^2$. Così facendo otteniamo:

$$2v_2'^2 = 2v_2'^2 \cos^2(\beta) + 2v_1'v_2' \cos(\alpha)\cos(\beta). \tag{8}$$

Possiamo ulteriormente semplificare l'equazione eliminando il fattore "2" ed anche un fattore v_2', che compaiono in tutti i termini. Otteniamo quindi una forma piuttosto semplice dell'equazione precedente:

$$v_2' = v_2' \cos^2(\beta) + v_1' \cos(\alpha)\cos(\beta). \tag{9}$$

C'è ancora un fattore v_1' che dà un po' di fastidio, ma non c'è problema: possiamo eliminarlo usando l'equazione originale della quantità di moto lungo "y" (2), che riporto qui per semplicità:

$$v_1' \sin(\alpha) = v_2' \sin(\beta),$$

cioè

$$v_1' = v_2' \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)}.$$

Torniamo alla sostituzione di questa nell'equazione (9) che abbiamo trovato e otteniamo:

$$v_2' = v_2' \cos^2(\beta) + v_2' \cos(\alpha)\cos(\beta)\frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)}. \tag{10}$$

Possiamo semplificare v_2' da entrambi i membri e usare ancora una volta l'*identità fondamentale della goniometria*

$$\sin^2(\beta) + \cos^2(\beta) = 1$$

per eliminare il termine $\cos^2(\beta)$:

$$1 = 1 - \sin^2(\beta) + \cos(\alpha)\cos(\beta)\frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)}. \tag{11}$$

Abbiamo quasi finito la dimostrazione: ci basta eliminare la coppia di 1 e semplificare un $\sin(\beta)$. Così facendo otteniamo:

$$0 = -\sin(\beta) + \frac{\cos(\alpha)\cos(\beta)}{\sin(\alpha)}, \tag{12}$$

che, moltiplicando ambo i membri per $\sin(\alpha)$, possiamo riscrivere come:

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta). \tag{13}$$

Da questa formula non è evidentissimo il fatto che

$$\alpha + \beta = 90°,$$

tuttavia possiamo usare le *formule di Werner*, ovverosia le formule di prodotto tra seni e coseni per semplificare qualcosa. Le formule che ci sono utili sono:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos((\alpha-\beta)\right] \\ \sin(\alpha)\sin(\beta) &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos((\alpha+\beta)\right].\end{aligned}$$

Se sfruttiamo queste proprietà otteniamo:

$$\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right] = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]. \tag{14}$$

Semplificando i termini comuni otteniamo che:

$$\cos(\alpha+\beta)) = -\cos(\alpha+\beta). \tag{15}$$

Ovvero otteniamo che l'equazione è verificata se la quantità $\cos(\alpha+\beta)$ è uguale al suo opposto. L'unico caso in cui questo può accadere è quando

$$\cos(\alpha+\beta) = -\cos(\alpha+\beta) = 0$$

Questo è verificato se l'angolo è 90°. Cioè otteniamo che:

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} = 90°. \tag{16}$$

Questo conclude la nostra dimostrazione.

Riassumendo: per un urto elastico in due dimensioni tra due corpi di masse uguali l'angolo formato dalle traiettorie DOPO l'urto è SEMPRE di 90°, e non dipende né dalle masse dei corpi né dalle velocità iniziali o finali degli stessi.