

Urto elastico in 2 dimensioni

di Matteo Musso

17 gennaio 2023

In questo set di note dimostreremo una proprietà particolare degli urti elastici in due dimensioni: dopo l'urto, l'angolo tra due corpi di massa uguale è sempre di 90° .

Definiamo il nostro problema:

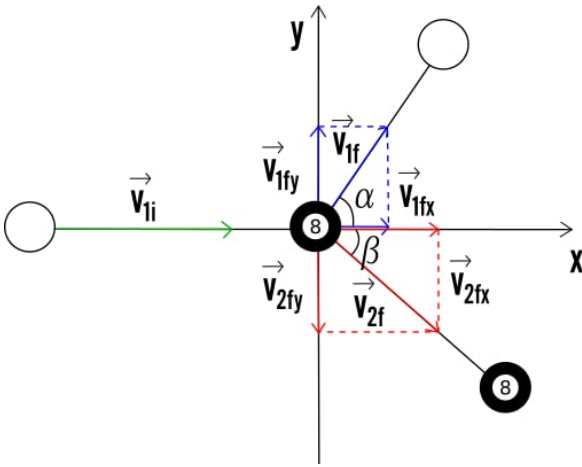


Figura 1: In questo esempio un corpo è fermo (pallina "8") e l'altro si muove verso di lui lungo l'asse delle x .

Anche se sembra un caso particolare, qualsiasi caso può essere ricondotto a questo, anche due corpi che hanno velocità diverse. Di conseguenza, i risultati che dimostreremo sono generali.

1 Corpi con masse uguali

Per questa dimostrazione assumiamo che i due corpi siano dotati della stessa massa ($m_1 = m_2$) e vogliamo dimostrare

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

con α e β i due angoli di uscita dei due corpi dopo l'urto rispetto all'asse delle x .

Per fare questo, richiamiamo le leggi di conservazione per un urto elastico con due corpi di massa generica:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \quad \text{Conservazione dell'energia cinetica}$$

$$m_1v_1 = m_1v_1' \cos(\alpha) + m_2v_2' \cos(\beta) \quad \text{Quantità di moto lungo "x"} \quad (1)$$

$$0 = m_1v_1' \sin(\alpha) + m_2v_2' \sin(-\beta) \quad \text{Quantità di moto lungo "y"}$$

A primo membro sono presenti le quantità prima dell'urto e a secondo membro quelle dopo l'urto. v_1 e v_2 sono le velocità dei due oggetti prima dell'urto, mentre v_1' e v_2' sono le velocità dopo l'urto.

Il segno " $-$ " nella conservazione della quantità di moto lungo " y " deriva dal fatto che gli angoli sono definiti in senso antiorario, da cui $\alpha > 0$ e $\beta < 0$. Possiamo semplificare la scrittura ricordando che

$$\sin(-\beta) = -\sin(\beta).$$

Notiamo che tutte le masse si possono semplificare, in quanto uguali. Inoltre, la velocità iniziale del corpo “2” è 0 poiché è fermo. Sostituendo otteniamo:

$$\begin{aligned} v_1^2 &= v_1'^2 + v_2'^2 && \text{Conservazione dell'energia cinetica} \\ v_1 &= v_1' \cos(\alpha) + v_2' \cos(\beta) && \text{Quantità di moto lungo “x”} \\ 0 &= v_1' \sin(\alpha) - v_2' \sin(\beta) && \text{Quantità di moto lungo “y”}. \end{aligned} \quad (2)$$

Per ottenere la relazione che ci interessa, prendiamo il quadrato delle equazioni di conservazione della quantità di moto lungo “x” e “y”:

$$\begin{aligned} (v_1)^2 &= v_1'^2 \cos^2(\alpha) + v_2'^2 \cos^2(\beta) + 2v_1'v_2' \cos(\alpha) \cos(\beta), \\ v_1'^2 \sin^2(\alpha) &= +v_2'^2 \sin^2(\beta). \end{aligned} \quad (3)$$

Nella seconda abbiamo portato a secondo membro $v_2' \sin(\beta)$ in modo da calcolare più agevolmente il quadrato.

Possiamo ora usare l'*identità fondamentale della goniometria*:

$$\begin{aligned} \sin^2(\alpha) &= 1 - \cos^2(\alpha) \\ \sin^2(\beta) &= 1 - \cos^2(\beta) \end{aligned}$$

e sostituire nell'equazione della quantità di moto lungo “y”:

$$v_1'^2 [1 - \cos^2(\alpha)] = +v_2'^2 [1 - \cos^2(\beta)], \quad (4)$$

ottenendo quindi

$$v_1' \cos^2(\alpha) = v_1'^2 - v_2'^2 + v_2'^2 \cos^2(\beta). \quad (5)$$

Ora possiamo usare l'equazione (5) e sostituirla nell'equazione della quantità di moto lungo “x”, ottenendo:

$$v_1^2 = v_1'^2 - v_2'^2 + 2v_2'^2 \cos^2(\beta) + 2v_1'v_2' \cos(\alpha) \cos(\beta). \quad (6)$$

Sfruttiamo ora la conservazione dell'energia cinetica per eliminare il termine v_1^2 . Cioè scriviamo

$$v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2$$

e sostituiamo nell'equazione precedente:

$$v_1'^2 + v_2'^2 = v_1'^2 - v_2'^2 + 2v_2'^2 \cos^2(\beta) + 2v_1'v_2' \cos(\alpha) \cos(\beta). \quad (7)$$

Portiamo a primo membro il termine $v_2'^2$ ed eliminiamo i due termini $v_1'^2$. Così facendo otteniamo:

$$2v_2'^2 = 2v_2'^2 \cos^2(\beta) + 2v_1'v_2' \cos(\alpha) \cos(\beta). \quad (8)$$

Possiamo ulteriormente semplificare l'equazione eliminando il fattore “2” ed anche un fattore v_2' , che compaiono in tutti i termini. Otteniamo quindi una forma piuttosto semplice dell'equazione precedente:

$$v_2' = v_2' \cos^2(\beta) + v_1' \cos(\alpha) \cos(\beta). \quad (9)$$

C'è ancora un fattore v_1' che dà un po' di fastidio, ma non c'è problema: possiamo eliminarlo usando l'equazione originale della quantità di moto lungo “y” (2), che riporto qui per semplicità:

$$v_1' \sin(\alpha) = v_2' \sin(\beta),$$

cioè

$$v_1' = v_2' \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)}.$$

Torniamo alla sostituzione di questa nell'equazione (9) che abbiamo trovato e otteniamo:

$$v_2' = v_2' \cos^2(\beta) + v_2' \cos(\alpha) \cos(\beta) \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)}. \quad (10)$$

Possiamo semplificare v_2' da entrambi i membri e usare ancora una volta l'*identità fondamentale della goniometria*

$$\sin^2(\beta) + \cos^2(\beta) = 1$$

per eliminare il termine $\cos^2(\beta)$:

$$1 = 1 - \sin^2(\beta) + \cos(\alpha) \cos(\beta) \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)}. \quad (11)$$

Abbiamo quasi finito la dimostrazione: ci basta eliminare la coppia di 1 e semplificare un $\sin(\beta)$. Così facendo otteniamo:

$$0 = -\sin(\beta) + \frac{\cos(\alpha) \cos(\beta)}{\sin(\alpha)}, \quad (12)$$

che, moltiplicando ambo i membri per $\sin(\alpha)$, possiamo riscrivere come:

$$\sin(\alpha) \sin(\beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta). \quad (13)$$

Da questa formula non è evidentissimo il fatto che

$$\alpha + \beta = 90^\circ,$$

tuttavia possiamo usare le *formule di Werner*, ovvero sia le formule di prodotto tra seni e coseni per semplificare qualcosa. Le formule che ci sono utili sono:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) \cos(\beta) &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \\ \sin(\alpha) \sin(\beta) &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]. \end{aligned}$$

Se sfruttiamo queste proprietà otteniamo:

$$\frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]. \quad (14)$$

Semplificando i termini comuni otteniamo che:

$$\cos(\alpha + \beta) = -\cos(\alpha + \beta). \quad (15)$$

Ovvero otteniamo che l'equazione è verificata se la quantità $\cos(\alpha + \beta)$ è uguale al suo opposto. L'unico caso in cui questo può accadere è quando

$$\cos(\alpha + \beta) = -\cos(\alpha + \beta) = 0$$

Questo è verificato se l'angolo è 90° . Cioè otteniamo che:

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} = 90^\circ. \quad (16)$$

Questo conclude la nostra dimostrazione.

Riassumendo: per un urto elastico in due dimensioni tra due corpi di masse uguali l'angolo formato dalle traiettorie **dopo** l'urto è **SEMPRE di 90°** , e non dipende né dalle masse dei corpi né dalle velocità iniziali o finali degli stessi.

2 Corpi con masse differenti

Che succede quando le masse sono diverse? Cioè, se $m_1 \neq m_2$?

In questo caso i conti si fanno un po' più complicati, in quanto dobbiamo ripartire dall'equazione (1) e non possiamo semplificarla. Possiamo ripetere i passaggi che ci hanno portato alla soluzione precedente, tenendo però in conto la presenza delle masse. Ripartiamo dall'equazione (3):

$$\begin{aligned} m_1^2 v_1^2 &= m_1^2 v_1'^2 \cos^2(\alpha) + m_2^2 v_2'^2 \cos^2(\beta) + 2m_1 m_2 v_1' v_2' \cos(\alpha) \cos(\beta), \\ m_1^2 v_1'^2 \sin^2(\alpha) &= m_2^2 v_2'^2 \sin^2(\beta). \end{aligned} \quad (17)$$

A questo punto, possiamo moltiplicare l'equazione all'energia cinetica per m_1 così da sostituire successivamente il termine " $m_1^2 v_1^2$ " nell'equazione per la quantità di moto lungo "x". Così facendo, otteniamo:

$$m_1^2 v_1^2 = m_1^2 v_1'^2 + m_1 m_2 v_2'^2. \quad (18)$$

Il termine $m_1 m_2 v_2'^2$ è il termine che ci dà più fastidio in quanto compare il prodotto tra le due masse. Per vederlo procediamo con la sostituzione, ottenendo:

$$m_1^2 v_1'^2 + m_2 m_1 v_2'^2 = m_1^2 v_1'^2 \cos^2(\alpha) + m_2^2 v_2'^2 \cos^2(\beta) + 2m_1 m_2 v_1' v_2' \cos(\alpha) \cos(\beta). \quad (19)$$

Possiamo operare qualche semplificazione, usando la relazione fondamentale della trigonometria

$$\cos^2(\alpha) = 1 - \sin^2(\alpha)$$

e sostituendo il termine $m_1 v_1'$ dall'equazione della quantità di moto lungo "y" (17). Otteniamo:

$$m_2^2 v_2'^2 \sin^2(\beta) + m_2 m_1 v_2'^2 = m_2^2 v_2'^2 \cos^2(\beta) + 2m_2^2 v_2'^2 \frac{\cos(\alpha) \cos(\beta) \sin(\beta)}{\sin(\alpha)}, \quad (20)$$

che, semplificando il semplificabile (cioè $v_2'^2$ ed m_2) ci porta alla forma definitiva dell'equazione, scrivibile come

$$m_2 \sin^2 \beta + m_1 = m_2 \cos^2 \beta + 2m_2 \frac{\cos(\alpha) \cos(\beta) \sin(\beta)}{\sin(\alpha)}. \quad (21)$$

Notiamo come questa equazione si riduca all'equazione (11) nel caso di masse uguali.

In questo caso non possiamo operare nessuna semplificazione per ottenere una forma pulita come nel caso precedente. È possibile tuttavia effettuare una serie di semplificazioni sfruttando altre relazioni goniometriche sulla falsa riga di quello che è stato fatto per la sezione precedente.

Dopo una serie lunga e tediosa di algebra si arriva ad un risultato generale:

$$\sin(\alpha + 2\beta) = \frac{m_1}{m_2} \sin(\alpha). \quad (22)$$

Di nuovo, notiamo come, assumendo $m_1 = m_2$, il risultato torni quello che ci aspettiamo, ovvero quello del caso di masse uguali. Infatti, ricordando che

$$\sin(\pi - x) = \sin(x),$$

la soluzione dell'equazione sopra la possiamo trovare ponendo

$$\alpha + 2\beta = \pi - \alpha,$$

che ci riconduce a

$$\alpha + \beta = \pi/2.$$

Notiamo che ci potrebbe essere un'altra soluzione, e cioè $2\beta = 2\pi n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, poiché il seno è periodico di periodo 2π ($\sin(2\pi n + \alpha) = \sin(\alpha)$). Quindi otterremmo una soluzione per cui $\beta = n\pi$. Fisicamente questo imporrebbe che le due biglie rimangano sull'asse delle "x". Questa soluzione però è da escludere, in quanto, dal momento che le due biglie non possono attraversarsi, la condizione che

dobbiamo richiedere è di avere la prima biglia che torni indietro (quindi $\alpha = \pi$) e la seconda che invece proceda avanti (quindi $\beta = 0$). Sostituendo però questi valori nelle leggi di conservazione notiamo che violeremmo la conservazione dell'energia cinetica, per cui questa soluzione va scartata.

Bene, dopo aver dimostrato che questo caso è generale, notiamo che la regola dei 90° si può ottenere solo perché non c'erano coefficienti davanti ai due seni ($m_1 = m_2$). Con due generiche masse, invece, il $\sin(\alpha + 2\beta)$ dipende dal rapporto delle masse e quindi non è più vero che $\alpha + \beta = \pi/2$ per qualsiasi angolo.